Sucesiones

Concepto de sucesión

Es más fácil reconocer una sucesión que definirla. Decimos, por ejemplo, que:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad y_n = n \operatorname{sen}(1/n), \quad z_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

son sucesiones. Para cada $n \in \mathbb{N}$ los números reales x_n, y_n, z_n están correctamente definidos. Suele usarse la notación $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ para representar a las sucesiones.

Una sucesión no se identifica con los valores que toman sus elementos sino que debemos considerar el orden en que esos valores se toman.

Por ejemplo, los elementos de las sucesiones $\{(-1)^n\}$ y$\{(-1)^{n+1}\}$ toman los mismos valores 1 y -1 pero en la primera valen 1 en los lugares pares y -1 en los impares y al revés en la segunda: son sucesiones distintas.

Una sucesión de números reales es una aplicación del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en $\mathbb{R}$.

Por tanto, el símbolo $\{x_n\}$ indica una aplicación, la que a cada $n \in \mathbb{N}$ hace corresponder el número $x_n \in \mathbb{R}$.

Sucesiones convergentes

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que **converge** a un número real x si, dado cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε tal que si n es cualquier número natural mayor o igual que m_ε se cumple que $|x_n - x| < \varepsilon$. Simbólicamente:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N} \; : n \geqslant m_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon}$$

Se dice también que el número x es **límite de la sucesión** $\{x_n\}$, y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} \{x_n\} = x$ o, simplemente, $\lim\{x_n\} = x$ e incluso, si no hay posibilidad de confusión, $\{x_n\} \to x$.

Teniendo en cuenta que la desigualdad $|x_n - x| < \varepsilon$ equivale a la doble desigualdad $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$ o, lo que es igual, $x_n \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$, la definición anterior lo que dice es que $\{x_n\}$ converge a x cuando, dado cualquier intervalo abierto $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$, se verifica que *todos los términos de la sucesión a partir de uno en adelante* están en dicho intervalo.

Una sucesión convergente tiene un único límite.

Sucesiones convergentes y estructura de orden de $\mathbb{R}$

Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$, $\lim\{y_n\} = y$ y que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m$ se tiene que $x_n \leqslant y_n$. Entonces se verifica que $x \leqslant y$.

Principio de las sucesiones encajadas. Supongamos que $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ son sucesiones tales que $\lim\{x_n\} = \lim\{z_n\} = \alpha$ y existe un número natural m_0 tal que para todo $n \geqslant m_0$ se verifica que

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$$

entonces se verifica que $\lim\{y_n\} = \alpha$.

Una consecuencia inmediata de este resultado es que si cambiamos arbitrariamente un número finito de términos de una sucesión, la nueva sucesión así obtenida es convergente si lo era la de partida y con su mismo límite.

Definiciones

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

Mayorada o acotada superiormente si su conjunto imagen está mayorado, es decir, si hay un número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Minorada o acotada inferiormente si su conjunto imagen está minorado, es decir, si hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \leqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Acotada si su conjunto imagen está mayorado y minorado, equivalentemente, si hay un número $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Creciente si $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Estrictamente creciente si $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Decreciente si $x_n \geqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Estrictamente decreciente si $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Monótona si es creciente o decreciente.

Estrictamente monótona si es estrictamente creciente o decreciente.

Toda sucesión convergente está acotada.

Convergencia de las sucesiones monótonas

Toda sucesión monótona y acotada es convergente. Más concretamente, si una sucesión $\{x_n\}$ es:

i) Creciente y mayorada, entonces $\lim\{x_n\} = \beta$, donde

$$\beta = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

ii) Decreciente y minorada, entonces $\lim\{x_n\} = \alpha$, donde

$$\alpha = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

El número e

La sucesión

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es creciente y la sucesión

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

es decreciente. Como $0 < y_n$, se sigue que $\{y_n\}$ es convergente. Puesto que

$$x_n = y_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = y_n \frac{n}{n+1}$$

se sigue que $\{x_n\}$ también es convergente y $\lim\{x_n\} = \lim\{y_n\}$. El valor común de este límite es un número real que se representa con el símbolo e.

Desigualdades útiles que debes recordar

$$\boxed{\mathrm{e} = \sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = \text{ínf}\left\{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} : m \in \mathbb{N}\right\}}$$

En consecuencia, para todos $n, m \in \mathbb{N}$ se verifica que:

$$\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}}$$

Sucesiones convergentes y estructura algebraica de $\mathbb{R}$

Dadas dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, se define su **suma** como la sucesión $\{x_n + y_n\}$ y su **producto** como la sucesión $\{x_n y_n\}$.

El producto de una sucesión convergente a cero por una sucesión acotada es una sucesión convergente a cero.

Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$ y $\lim\{y_n\} = y$. Entonces se verifica que:

$$\lim\{x_n + y_n\} = x + y, \quad \lim\{x_n y_n\} = x y\,.$$

Si además suponemos que $y \neq 0$, entonces $\lim\{x_n / y_n\} = x / y$.

Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ satisface la **condición de Cauchy**, si para cada número positivo, $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε, tal que para todos $p, q \in \mathbb{N}$ con $p \geqslant m_\varepsilon$ y $q \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $|x_p - x_q| < \varepsilon$.

Teorema de complitud de $\mathbb{R}$. Una sucesión de números reales es convergente si, y sólo si, verifica la condición de Cauchy.

Ejercicio

Estudia la monotonía y la convergencia de las siguientes sucesiones.

a) $x_1 = a > 3,\ x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 3}.$

b) $x_1 = 3,\ x_{n+1} = \dfrac{3 + 3x_n}{3 + x_n}.$

c) $x_1 = a > 1,\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right).$

Sucesiones divergentes

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

Positivamente divergente, y escribimos $\{x_n\} \to +\infty$, si para todo número real $K > 0$ existe un número natural $m_K \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant m_K$ se verifica que $x_n \geqslant K$.

Negativamente divergente, y escribimos $\{x_n\} \to -\infty$, si para todo número real $K < 0$ existe un número natural $m_K \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant m_K$ se verifica que $x_n \leqslant K$.

Diremos que una sucesión es **divergente** para indicar que es positivamente o negativamente divergente.

“Divergente” no es lo mismo que “No convergente”

Propiedades de las sucesiones divergentes

$\{|x_n|\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{1/x_n\} \to 0$.

La suma de una sucesión positivamente divergente con una sucesión minorada es otra sucesión positivamente divergente. En particular, la suma de dos sucesiones positivamente divergentes es otra sucesión positivamente divergente.

Propiedades de las sucesiones divergentes

El producto de dos sucesiones positivamente divergentes es otra sucesión positivamente divergente.

El producto de una sucesión positivamente divergente por una sucesión que converge a un número positivo es otra sucesión positivamente divergente.

Indeterminaciones

Las sucesiones del tipo $\{x_n+y_n\}$ donde $\{x_n\}\to+\infty$, $\{y_n\}\to-\infty$, *requieren un estudio particular en cada caso*. Tales sucesiones suele decirse que son **una indeterminación del tipo** "$\infty-\infty$".

Análogamente, si sabemos que $\{x_n\}\to 0$ y que $\{y_n\}$ es divergente, ello no proporciona ninguna información sobre el comportamiento de la sucesión $\{x_n y_n\}$; la cual se dice que es **una indeterminación del tipo** "$0\,\infty$". El cociente de dos sucesiones divergentes o de dos sucesiones que convergen a cero, da lugar a las llamadas **indeterminaciones de los tipos** "∞/∞", "$0/0$".

Sucesiones y límite funcional

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y sean $a, L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Equivalen las afirmaciones:

a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

b) Para ***toda*** sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A tal que $\{x_n\} \to a$ con $x_n \neq a$, se verifica que $\{f(x_n)\} \to L$.

Una consecuencia inmediata de este resultado es que todo límite funcional que conozcas te va a permitir resolver *muchos* límites de sucesiones. En particular, de la lista de límites básicos que debes conocer se deducen los siguientes resultados.

Límites que debes saber de memoria

Para toda sucesión $\{x_n\} \to 0$ se verifica que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x_n}{x_n} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arc\,sen} x_n}{x_n} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos x_n}{x_n^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg} x_n}{x_n} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} x_n}{x_n} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{e^{x_n}-1}{x_n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - \operatorname{sen} x_n}{(x_n)^3} = \frac{1}{6} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(1+x_n)^\alpha - 1}{x_n} = \alpha \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x_n)}{x_n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg} x_n - x_n}{(x_n)^3} = \frac{1}{3} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x_n) - x_n}{x_n^2} = \frac{-1}{2}$$

Estrategia

Una estrategia para calcular límites de sucesiones consiste en convertir el límite de la sucesión que tienes que calcular en un caso particular de un límite funcional. El por qué de esta estrategia es que para calcular límites de funciones disponemos de muchas más herramientas que las que tenemos para trabajar directamente con sucesiones.

Según esta estrategia, para calcular el límite de una sucesión $\{y_n\}$ lo que hay que hacer es relacionar dicho límite con un límite funcional. Debemos inventarnos una función, f, y una sucesión convergente, $\{x_n\} \to a$, de forma que se tenga $y_n = f(x_n)$. Entonces, podemos asegurar que si $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, también es $\lim\{y_n\} = \alpha$.

Ejercicio

Calcula el límite de las sucesiones:

$$a)\ x_n = \frac{\log(n)}{n(\sqrt[n]{n}-1)},\ b)\ y_n = n\,\mathrm{sen}(1/n),\ c)\ z_n = n\big((1+1/n)^{\alpha}-1\big)$$

$$v_n = n\frac{\sqrt[n]{\mathrm{e}}-\mathrm{e}^{\mathrm{sen}(1/n)}}{1-n\,\mathrm{sen}(1/n)}$$

Continuidad y sucesiones

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y sea $a \in A$. Equivalen las afirmaciones:

a) f es continua en a.

b) Para ***toda*** sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A tal que $\{x_n\} \to a$, se verifica que $\{f(x_n)\} \to f(a)$.

Podemos expresar este resultado como sigue: *la continuidad permuta con el límite secuencial*, esto es, si f es continua entonces:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$$

Sucesiones de exponenciales y logaritmos

- $\{x_n\} \to x \iff \{e^{x_n}\} \to e^x$.
- $\{x_n\} \to +\infty \iff \{e^{x_n}\} \to +\infty$.
- $\{x_n\} \to -\infty \iff \{e^{x_n}\} \to 0$.

Para toda sucesión de números positivos $\{x_n\}$ se verifica que:

- $\{x_n\} \to x > 0 \iff \{\log(x_n)\} \to \log x$.
- $\{x_n\} \to +\infty \iff \{\log(x_n)\} \to +\infty$.
- $\{x_n\} \to 0 \iff \{\log(x_n)\} \to -\infty$.

Sucesiones asintóticamente equivalentes

Diremos que $\{x_n\}$ es **asintóticamente equivalente** a $\{y_n\}$, y escribiremos simbólicamente $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, si $\{x_n/y_n\} \to 1$.

Por ejemplo, las sucesiones $\{\log n\}$ y $\{n(\sqrt[n]{n}-1)\}$ son asintóticamente equivalentes.

Sucesiones asintóticamente equivalentes

Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones asintóticamente equivalentes y $\{z_n\}$ una sucesión cualquiera. Se verifica que:

a) $\{x_n z_n\}$ es convergente si, y sólo si, $\{y_n z_n\}$ es convergente, en cuyo caso ambas sucesiones tienen el mismo límite.

b) $\{x_n z_n\}$ es divergente si, y sólo si, $\{y_n z_n\}$ es divergente, en cuyo caso ambas sucesiones son divergentes del mismo tipo.

En particular, $\{x_n\}$ es convergente (resp. divergente) si, y sólo si, $\{y_n\}$ es convergente (resp. divergente), en cuyo caso ambas tienen igual límite (resp. son divergentes del mismo tipo).

Observación

Es importante observar que en una suma de sucesiones no se puede, en general, sustituir una sucesión por otra asintóticamente equivalente. Por ejemplo, si $x_n = n+1$, $y_n = n + 1/n$ y $z_n = -n$, es claro que $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ pero $\{x_n + z_n\} = \{1\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es asintóticamente equivalente a $\{y_n + z_n\} = \{1/n\}$.

Sucesiones de potencias

$$x_n^{y_n} = \exp(y_n \log(x_n)),$$

Es una indeterminación cuando $\{y_n \log(x_n)\}$ es una indeterminación del tipo "$0\,\infty$", lo que ocurre cuando:

a) $\{x_n\} \to 1$, $\{|y_n|\} \to +\infty$ (indeterminación "1^∞")

b) $\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to 0$ (indeterminación "∞^0")

c) $\{x_n\} \to 0$, $\{y_n\} \to 0$ (indeterminación "0^0")

Criterio de equivalencia logarítmica

Permite resolver en muchos casos las indeterminaciones "1^∞" y "$0\,\infty$".

Sean $\{x_n\}$ una sucesión de números positivos distintos de 1 que converge a 1, $\{y_n\}$ una sucesión cualquiera y L un número real. Entonces se tiene que:

- $\lim\{x_n^{y_n}\} = \mathrm{e}^L \Longleftrightarrow \lim\{y_n(x_n - 1)\} = L$.
- $\{x_n^{y_n}\} \to +\infty \Longleftrightarrow \{y_n(x_n - 1)\} \to +\infty$.
- $\{x_n^{y_n}\} \to 0 \Longleftrightarrow \{y_n(x_n - 1)\} \to -\infty$.

Criterio de Stolz

Sea $\{y_n\}$ una sucesión positivamente divergente y estrictamente creciente y sea $\{x_n\}$ cualquier sucesión. Supongamos que

$$\left\{\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right\} \to L$$

donde $L \in \mathbb{R}$, o $L = +\infty$, o $L = -\infty$. Entonces se verifica también que $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\} \to L$.

Criterio de la media aritmética

Supongamos que $\{a_n\} \to L$ donde L es un número real, o $L = +\infty$, o $L = -\infty$. Entonces se verifica que

$$\left\{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right\} \to L.$$

Criterio de la media geométrica

Supongamos que $\{a_n\} \to L$ donde $\{a_n\}$ es una sucesión de números positivos y L es un número real o bien $L = +\infty$. Entonces se verifica que

$$\left\{ \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \right\} \to L.$$

Supongamos que $\left\{ \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \right\} \to L$ donde $\{x_n\}$ es una sucesión de números positivos y L es un número real o bien $L = +\infty$. Entonces se verifica que $\{ \sqrt[n]{x_n} \} \to L$.

Ejercicio

Sea $\alpha > -1$. Calcula el límite de la sucesión:

$$x_n = \frac{1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$$

Ejercicio

Sean $a > 0$, $b > 0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha + \beta \neq 0$. Calcula el límite de la sucesión:

$$x_n = \left(\frac{\alpha \sqrt[n]{a} + \beta \sqrt[n]{b}}{\alpha + \beta} \right)^n$$

Ejercicio

Sea $p \in \mathbb{N}$. Calcula el límite de la sucesión:

$$x_n = \left(\frac{1 + 2^{p/n} + 3^{p/n} + \cdots + p^{\,p/n}}{p} \right)^n$$

Ejercicio

Calcula el límite de la sucesión:

$$x_n = n\left[\left(1 + \frac{1}{n^3 \log(1 + 1/n)}\right)^n - 1\right]$$

Ejercicio

Calcula el límite de la sucesión:

$$x_n = \log n \left[\left(\frac{\log(n+1)}{\log n} \right)^n - 1 \right]$$

Ejercicio

Sean $p, q \in \mathbb{N}$. Calcula el límite de la sucesión:

$$x_n = \sqrt[n]{\frac{(pn)!}{(qn)^{pn}}}$$

Ejercicio

Se considera la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida para todo $x > 0$ por $f(x) = \log x - x + 2$.

a) Prueba que f tiene exactamente dos ceros, α y β, con $\alpha < 1 < \beta$.

b) Dado $x_1 \in]\alpha, \beta[$, se define la siguiente sucesión por recurrencia:

$$x_{n+1} = \log x_n + 2 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prueba que $\{x_n\}$ es una sucesión monótona creciente y acotada que converge a β.